La física del Tenis de Mesa

El tenis de mesa nació en el año 1870 en Inglaterra, intentando adaptar el tenis normal a espacios más pequeños, para jugar se utilizan 3 cosas fundamentales:

a) Una pelota de tenis de mesa,

b) una raqueta hecha de madera y forrada con gomas,

c) y obviamente, una mesa de tenis de mesa

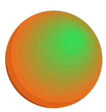


Figura 1a

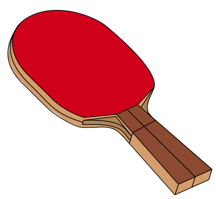


Figura 1b

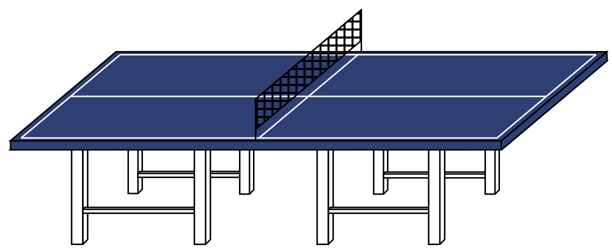


Figura 1c

En este problema analizaremos la física detrás de este deporte tan complejo que contiene tiros y giros inesperados. Durante todo el problema, asuma que la pelota tiene una masa m, radio r y momento angular $I = \frac{2}{3}mr^2$, y la raqueta tiene una masa $M \gg m$ y su coeficiente de fricción cinético es μ.

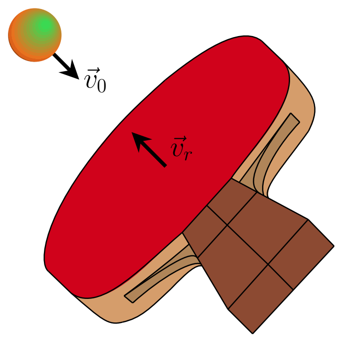
Parte A. Golpe Simple. (2.0 pts)

La raqueta de tenis de mesa no es una superficie ideal. Por lo tanto, si la pelota llega con una componente de velocidad perpendicular $v_{0,\perp}$ a la raqueta, esta saldrá con una componente $v_{f,\perp}$, la cual es menor que la inicial. Esta reducción de la velocidad se caracteriza por el coeficiente de restitución:

$$\varepsilon_r = \frac{|v_{f,\perp}|}{|v_{0,\perp}|} \tag{1}$$

Esta definición es válida en el marco de referencia de la raqueta.

El movimiento más simple del tenis de mesa es un golpe directo a la pelota, donde la pelota se acerca a una velocidad $\vec{v}_0$ hacia la raqueta y la raqueta se mueve a una velocidad $\vec{v}_r$ hacia la pelota como se puede ver en la figura:



A1) (1.5pts) Encuentre la rapidez de la pelota de tenis de mesa después del choque con la raqueta, v_f, en términos de v_r,v_0 y ε_r. Tenga en cuenta que la pelota no tiene rotación alguna.

En este apartado es clave que el estudiante identifique el cambio de marco de referencia, debido a que el coeficiente de restitución solamente es valido en el marco de referencia de la raqueta, por lo tanto:

$$\varepsilon_r = \frac{v'_f}{v'_0}, \quad v'_0 = v_r + v_0, \quad v'_f = v_f - v_r$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{v_f - v_r}{v_r + v_0} \quad \rightarrow \quad v_f - v_r = \varepsilon_r(v_r + v_0)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{v_f = v_r + (v_r + v_0)\varepsilon_r}$$

A2) (0.5pts) ¿Cuál debe de ser la rapidez de la raqueta, $v_{f,\text{critico}}$ para que la pelota se detenga completamente luego del choque? Escriba su respuesta en términos de v_0 y ε_r.

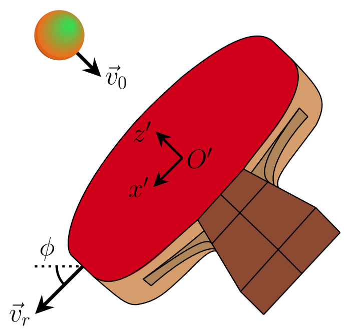
Cuando la pelota se detiene completamente $v_f = 0$, por lo tanto:

$$0 = v_{r,\text{critico}} + (v_0 + v_{r,\text{critico}})\varepsilon_r \quad \rightarrow \quad v_{r,\text{critico}}\,(1 + \varepsilon_r) + v_0\varepsilon_r = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{v_{r,\text{critico}} = -v_0\frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r}}$$

Parte B. Golpe Estilo Corte. (4.0pts)

En un juego de la vida real, golpear a la pelota con un golpe “directo” tal vez no sea la mejor idea para ganar puntos. Un golpe más usual es el golpe estilo “corte”, en el cual la raqueta se mueve perpendicularmente con respecto a la pelota justo antes de impactar (véase la figura).



Al golpear a la pelota de esta manera, esta obtendrá una rotación debido a la fuerza de fricción generada en el contacto con la raqueta.

B1) (1.5pts) Encuentre la velocidad final con la que la pelota saldrá de la raqueta, $\vec{v}_f$, en el marco de coordenadas O' que se encuentra fijo en la raqueta. Tenga en cuenta que el tiempo de impacto es mucho menor que el tiempo que le toma a la pelota para comenzar a rodar sin deslizarse. Exprese su respuesta en términos de μ, v_0 y ε_r.

Existen dos tipos de soluciones:

La primera es utilizando análisis del cambio de momento directamente

- Conseguir la nueva componente de la velocidad en z':

$$\varepsilon_r = \frac{v_{f,z}}{v_0} \quad \rightarrow \quad v_{f,z'} = v_0 \varepsilon_r$$

- Y de ahí podemos utilizar el análisis del cambio de momento para conseguir el valor de $N\Delta t$ y con ese valor conseguir el cambio de momento en el eje de las x-s:

$$\frac{\Delta p_{z'}}{\Delta t} = \frac{m(\varepsilon_r v_0 - (-v_0))}{\Delta t} = N \quad \rightarrow \quad N\Delta t = m v_0(\varepsilon_r + 1)$$

$$\hookrightarrow \frac{\Delta p_{x'}}{\Delta t} = \frac{m(v_{f,x'} - (0))}{\Delta t} = f_k = N\mu \quad \rightarrow \quad v_{f,x'} = \frac{N\Delta t \mu}{m} = v_0\mu(\varepsilon_r + 1)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{v_f} = v_0\mu(\varepsilon_r + 1)\hat{x'} + v_0\varepsilon_r\hat{z'}}$$

La segunda opción es realizando un cambio de marco de referencia:

- Velocidad inicial en el marco de la raqueta:

$$\vec{v_0'} = -v_r\hat{x'} - v_0\hat{z'}$$

- Para encontrar la velocidad final perpendicular podemos ocupar el coeficiente de restitución:

$$v_{f,z'} = v'_{f,z'} = v_0\varepsilon_r$$

- Encontrar la relación para el cambio de momento:

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \frac{m(v'_{f,z'} - v'_{0,z'})}{\Delta t} = N \quad \rightarrow \quad N\Delta t = mv_0(\varepsilon_r + 1)$$

- La causante del cambio de momento en el eje paralelo es la fricción, y como la pelota se desliza en todo el trayecto: $f_k = N\mu$, por lo tanto:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{m(v'_{f,x'} - v'_{0,x'})}{\Delta t} = N\mu \quad \rightarrow \quad v'_{f,x'} = v'_{0,x'} + \frac{N\Delta t\mu}{m}$$

$$v'_{f,x'} = -v_r + \mu v_0(\varepsilon_r + 1) \quad \rightarrow \quad v_{f,x'} = v'_{f,x'} + v_r$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{v_f} = v_0\mu(\varepsilon_r + 1)\hat{x'} + v_0\varepsilon_r\hat{z'}}$$

B2) (1.0pts) ¿A qué ángulo θ con respecto a la horizontal sale la pelota? Escriba su respuesta en términos de ϕ,μ y ε_r. Tome en cuenta que el ángulo al que se mueve la raqueta con respecto a la horizontal es $-\phi$ (Por convención, ángulos en sentido antihorario son positivos).

El ángulo con el que sale la pelota con respecto a la paralela de la raqueta es: $\theta' = \arctan\left(\frac{v_{f,z}}{v_{f,x}}\right) = \arctan\left(\frac{\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r + 1)}\right)$, por lo tanto, el ángulo con respecto a la horizontal es:

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r + 1)}\right) - \phi}$$

B3) (0.5pts) El ángulo crítico ϕ_c nos dice qué tanto podemos inclinar la raqueta sin que la pelota se dirija hacia abajo ($\theta < 0°$)después del choque. ¿Cuál debe de ser el valor del coeficiente de restitución en función del coeficiente de fricción cinético μ si queremos que el valor del ángulo crítico sea $\phi_c = 60°$?

Cuando estamos en el ángulo crítico:

$$\theta = 0 = \arctan\left(\frac{\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r + 1)}\right) - 60° \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r + 1)} = \tan(60°) = \sqrt{3}$$

$$\varepsilon_r = \mu\varepsilon_r\sqrt{3} + \mu\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r\left(1 - \mu\sqrt{3}\right) = \mu\sqrt{3}$$

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\mu\sqrt{3}}{1 - \mu\sqrt{3}}}$$

B4) (1.0pts) ¿Cuál es la rapidez angular, ω, que obtiene la pelota? Exprese su resultado en términos de r, μ,v_0 y ε_r.

Para este apartado, nos debemos de fijar en el torque ejecutado gracias a la fuerza de fricción: $f_k r$, y al cambio de momento angular que ejecutará este torque, por Newton rotacional tenemos que:

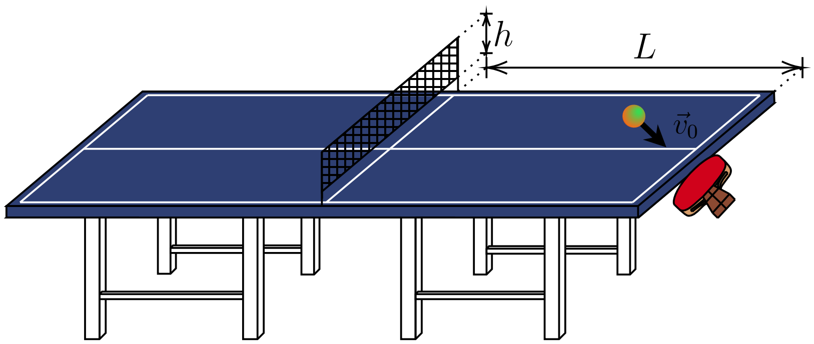
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I(\omega_f - \omega_0)}{\Delta t} = f_k r, \quad \rightarrow \quad \omega_f = \frac{N\Delta t \mu r}{I}$$

Teniendo en cuenta que $I = \frac{2}{3}mr^2$ y también que $N\Delta t = mv_0(\varepsilon_r + 1)$:

$$\omega_f = \frac{mv_0(\varepsilon_r + 1)\mu r}{\frac{2}{3}mr^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_f = \frac{3}{2}\mu(\varepsilon_r + 1)\frac{v_0}{r}}$$

Parte C. Comparando tiros. (4.0pts)

Tenga en cuenta que usted está jugando tenis de mesa, realiza un saque y su rival retorna la pelota a su lado, y usted decide contactar la pelota justamente al borde de la mesa cuando la velocidad de esta se encuentra $45°$ con respecto a la horizontal como se ve en la imagen.



C1) (1.5pts) Si se sabe que $\varepsilon_r = 2/3$, $\mu = 0.1$. Encuentre a que distancia llegará la pelota en términos de v_0 si:

a) Se le da a la pelota un golpe simple (Golpe de la parte A).
b) Se le da a la pelota un golpe de corte (Golpe de la parte B).

Tenga en cuenta que la velocidad de la pelota antes de hacer contacto con ella es v_0 y que la velocidad de la raqueta es $v_r = 2v_0$, también tome que la aceleración gravitatoria es $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

I) Cuando se le da un golpe simple, la velocidad y el ángulo con respecto a la horizontal con la que sale la pelota son:

$$v_1 = 2v_0 + 3v_0\varepsilon_r = v_0(2 + 3\varepsilon_r) = 4v_0, \quad \theta_1 = 45^\circ$$

Por lo tanto, la distancia máxima que recorrerá es: $d_1 = \dfrac{v_1^2 \sin(2\theta_1)}{g} = \dfrac{16v_0^2}{10}$.

II) Cuando se le da un golpe estilo corte, la velocidad y el ángulo con respecto a la horizontal con la que sale la pelota son:

$$v_2 = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{z'}^2} = \sqrt{\mu^2 v_0^2(\varepsilon_r + 1)^2 + v_0^2\varepsilon_r^2} = \frac{v_0\sqrt{5}}{3}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r + 1)}\right) - 45^\circ = 30.96^\circ$$

Por lo tanto, la distancia máxima que recorrerá es: $d_2 = \dfrac{v_2^2 \sin(2\theta_2)}{g} = \dfrac{5v_0^2}{102}$.

C2) (2.5pts) Determina el intervalo de valores de v_0 de tal manera que la pelota llegue a la mesa del oponente, para cada tipo de golpe. Tenga en cuenta que $L = 1.37\ \mathrm{m}$ y $h = 15.25\ \mathrm{cm}$.

El primer valor de v_0 que es importante es cuando la pelota apenas alcanza a pasar la red. Para encontrar estos puntos debemos de ocupar un poco de cinemática:

$$\Delta x = L = t v_{\text{min}} \cos(\theta), \quad \Delta y = h = t v_{\text{min}} \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{L}{v_{\text{min}} \cos(\theta)} \quad \rightarrow \quad h = \left(\frac{L}{v_{\text{min}} \cos(\theta)} \right) v_{\text{min}} \sin(\theta) - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v \cos(\theta)} \right)^2$$

$$\rightarrow \quad h = L \tan(\theta) - \frac{g L^2}{2 v_{\text{min}}^2 \cos^2(\theta)} \quad \rightarrow \quad \frac{g L^2}{2 v_{\text{min}}^2 \cos^2(\theta)} = L \tan(\theta) - h$$

$$v_{\text{min}} = \frac{L \sec(\theta) \sqrt{g}}{\sqrt{2 L \tan(\theta) - 2h}}$$

El valor de esta primera velocidad crítica para:

I) es: $v_{1,\text{min}} = 3.926 \text{m/s} = 4 v_{0,\text{min1}}$, o sea: $v_{0,\text{min1}} = 0.9816 \text{m/s}$

II) es: $v_{2,\text{min}} = 4.366 \text{m/s} = v_0 \frac{\sqrt{5}}{3}$, o sea: $v_{0,\text{min2}} = 5.858 \text{m/s}$

Como es de esperarse, la velocidad mínima para que la pelota pase es menor en el caso del golpe simple, y es considerablemente mayor en el caso del golpe cortado.

El segundo valor es cuando la pelota alcanza justamente el borde de la mesa, o sea: $\Delta x = 2L$ (recordar que la pelota no tocará la red dado que la velocidad de este apartado será mayor que la del apartado anterior). Por lo tanto:

I) $2L = d_1 \quad \rightarrow \quad v_{0,\text{max1}} = \sqrt{\frac{20L}{16}} = 1.309 \text{m/s}$

II) $2L = d_2 \quad \rightarrow \quad v_{0,\text{max2}} = \sqrt{\frac{204L}{5}} = 7.476 \text{m/s}$

Por lo tanto, tenemos que:

Velocidad	**Tipo de golpe**
$v_0 < 0.9816\mathrm{m/s}$	Ninguno (No es posible que regrese a la mesa del rival).
$0.9816\mathrm{m/s} \leq v_0 \leq 1.309\mathrm{m/s}$	Golpe simple.
$1.309\mathrm{m/s} < v_0 < 5.858\mathrm{m/s}$	Ninguno (No es posible que regrese a la mesa del rival).
$5.858\mathrm{m/s} \leq v_0 \leq 7.476\mathrm{m/s}$	Golpe de corte.
$7.476\mathrm{m/s} < v_0$	Ninguno (No es posible que regrese a la mesa del rival).